

# **Η δόμηση της μαθηματικής σκέψης στην προσχολική ηλικία**

**Κασιμάτη Κατερίνα**

**Πριγκηποννήσων 9**

**Κυψέλη,11363**

*Πρακτικά 20ου Πανελληνίου συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Βέροια (2003).*

## **Περίληψη**

Η αναπτυξιακή θεωρία του Piaget, η κοινωνικοπολιτιστική θεώρηση του Vygotsky και οι σύγχρονες θεωρίες μάθησης προσφέρουν καθοδήγηση στο είδος των μαθηματικών εννοιών, που συνίστανται περισσότερο στα παιδιά της προσχολικής ηλικίας και στη διαδικασία διδακτικής τους προσέγγισης.

Η συγκεκριμένη εργασία διαπραγματεύεται τη διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, το σχηματισμό των εννοιών, τα είδη της μαθηματικής γνώσης, τη προσέγγιση των ποιοτικών σχέσεων, τη δόμηση της έννοιας του αριθμού και την επίλυση προβλημάτων μέσα από τη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων.

## **Εισαγωγή**

«Τη στιγμή που το παιδί για πρώτη φορά οικειοποιείται μια καινούργια γι' αυτό σημασία ή ορολογία που είναι φορέας μιας επιστημονικής έννοιας, ο σχηματισμός της δεν έχει ολοκληρωθεί αλλά μόλις αρχίζει (Vygotsky,1934).

Στην προσχολική ηλικία οι έννοιες που αναπτύσσουν τα παιδιά αντιστοιχούν σε ένα πρωτογενές επίπεδο κατανόησης, χρήσης και εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών, κατά το οποίο οι έννοιες φαίνονται να εμπλέκονται στη δράση του υποκειμένου, αλλά το ίδιο δεν τις γνωρίζει, ούτε τις κατονομάζει ακόμα (Chevallard,1986). Η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών στο Νηπιαγωγείο βοηθά τα παιδιά να αναπτύξουν έννοιες και διαδικασίες μέσω των οποίων θα αντικειμενοποιηθεί η εμπειρία τους και θα τους δοθεί η ευκαιρία να γνωρίσουν, να αντιμετωπίσουν, να ερμηνεύσουν, να κατανοήσουν και να ελέγξουν τον κόσμο που τα περιβάλλει (Τζεκάκη, 2002).

### **Διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών**

Τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών εννοιών δίνουν τα κριτήρια και το επίπεδο κατάκτησής τους από το παιδί. Οι ιδιαιτερότητές τους, οι συνθήκες ανάπτυξής τους, το εννοιολογικό πλαίσιο αναφοράς, οριοθετούν την έκταση και το βάθος στο οποίο μπορεί να επεκταθεί μια ενδεχόμενη μάθηση. Όπως αναφέρει ο Piaget «Είναι μεγάλο λάθος να θεωρούμε ότι το παιδί κατακτά τη γνώση των αριθμών και άλλες μαθηματικές έννοιες μόνο από τη διδασκαλία. Αντίθετα, κατά ένα μεγάλο βαθμό τις αναπτύσσει μόνο του, ανεξάρτητα και αυθόρμητα».

Όταν οι ενήλικοι προσπαθούν να επιβάλλουν μαθηματικές έννοιες σε ένα παιδί πρόωρα, η μάθησή του είναι καθαρά λεκτική. Η αληθινή κατανόηση αυτών των εννοιών συμβαδίζει με τη νοητική του ανάπτυξη (Hughes, 1999). Τα στάδια νοητικής ανάπτυξης στη θεωρία του Piaget, στις σημερινές κοινωνικές συνθήκες έχουν περιορισμένη εφαρμογή, γιατί τα στάδια δε διαχωρίζονται από ακριβή όρια, αν και οι μεταβατικές καταστάσεις ανάμεσά τους γίνονται βαθμιαία. Οι τρόποι σκέψης επίσης ενός παιδιού ποικίλουν μέσα στις διάφορες καταστάσεις εμπειρίας. Επιπλέον, όταν έχουμε να κάνουμε με μεγάλες ομάδες παιδιών, θα υπάρχουν παιδιά διαφόρων σταδίων μέσα στην ίδια ομάδα. Σε μια τάξη νηπίων μερικά θα παρουσιάζουν προεγνωστική σκέψη, άλλα εννοιακές παραστάσεις και μερικά θα ενεργούν με συγκεκριμένες ενέργειες (Ρίτςμοντ, 1970).

Σύμφωνα με τη θεωρία του Vygotsky ο προσδιορισμός του βαθμού νοητικής ανάπτυξης του παιδιού γίνεται όχι μόνο με τη βοήθεια του νοητικού επιπέδου στο οποίο βρίσκεται αλλά και με βάση τη «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξής του». Το παιδί επομένως δεν πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο μόνο αυτό που μπορεί να κάνει αυτοδύναμο αλλά αυτό που του είναι προσιτό με τη συνεργασία του δασκάλου και υπό την καθοδήγησή του. Το βασικό θέμα στη διδασκαλία είναι ακριβώς αυτό το καινούργιο που μαθαίνει το παιδί. Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης, η οποία καθορίζει την περιοχή των προσιτών για το παιδί μεταβάσεων, είναι ακριβώς το καθοριστικό στοιχείο της διδασκαλίας.

Ο Bruner διατύπωσε περισσότερο τις επιστημονικές του θέσεις ως «μια θεωρία διδασκαλίας» και όχι ως μια «θεωρία μάθησης». Όπως επισημαίνει «μια θεωρία διδασκαλίας εμπεριέχει και τις θεωρίες μάθησης και εξέλιξης καθώς επίσης και τη φύση του ιδιαίτερου αντικείμενου που θα διδαχθεί»

(Κολιάδης,1997). Ο Bruner δέχεται ότι η γνωστική ανάπτυξη του ατόμου ακολουθεί μια σειρά από επάλληλα εξελικτικά στάδια. Κάθε επόμενο στάδιο αποτελεί έναν πολυπλοκότερο τρόπο εσωτερικής αναπαράστασης της εξωτερικής πραγματικότητας και περιγράφει τρεις τρόπους αναπαράστασης της γνώσης:

◆ **Πραξιακή αναπαράσταση:** το παιδί μαθαίνει μέσα από τη δράση, τη μίμηση και το χειρισμό των αντικειμένων (αισθησιοκινητικό στάδιο στον Piaget).

◆ **Εικονιστική αναπαράσταση:**είναι η αναπαράσταση του εξωτερικού κόσμου μέσω εσωτερικών πνευματικών εικόνων. Δεν υπάρχει όμως πλήρης διαχωρισμός ανάμεσα στο εξωτερικό αντικείμενο και στο αντίστοιχο εσωτερικό σύμβολο. Γι' αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιείται μεγάλη ποικιλία από εποπτικά μέσα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (προεννοιολογικό στάδιο και στάδιο των συγκεκριμένων λογικών πράξεων του Piaget).

◆ **Συμβολική αναπαράσταση:** το παιδί αναπαριστά την εξωτερική πραγματικότητα με αφηρημένα σύμβολα τα οποία μπορεί να χειρίζεται εσωτερικά, όπως λέξεις, μαθηματικά σύμβολα, σήματα κ.λ.π. (στάδιο των συγκεκριμένων λογικών πράξεων και στάδιο της αφαιρετικής σκέψης του Piaget).

Σύμφωνα με τη θεωρία κατασκευής της γνώσης η μάθηση των μαθηματικών ερμηνεύεται είτε ως μια διαδικασία ατομικής οικοδόμησης (κονστρουκτιβισμός), είτε ως μια διαδικασία κοινωνικοποίησης στις μαθηματικές σημασίες και τεχνικές της ευρύτερης κοινωνίας (κοινωνικοπολιτισμικός κονστρουκτιβισμός),( Κασιμάτη,2001). Σύμφωνα με τους κονστρουκτιβιστές (συνέχεια του Piaget) η μαθηματική μάθηση είναι μια διαδικασία εννοιολογικής αναδιοργάνωσης. Για τους κοινωνικοπολιτισμικούς (συνέχεια του Vygotsky) η μάθηση είναι μια διαδικασία κοινωνικο-πολιτισμικής μεταφοράς. Ο Cobb (1994) υπογραμμίζει ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις, οριακές ερμηνευτικές διαστάσεις, αφού η σχέση μεταξύ της αμοιβαίας οικοδόμησης της κοινωνικής γνώσης και της ιδιαίτερης εμπειρίας της κοινωνικής ζωής είναι διαλεκτική.

### **Σχηματισμός εννοιών**

Ο σχηματισμός εννοιών διέρχεται διάφορα στάδια, ανάλογα με το στάδιο ανάπτυξης που βρίσκεται το παιδί. Η γενετική θεωρία του Piaget, αντιστοιχίζει το παιδί της προσχολικής ηλικίας στην προσυλλογιστική περίοδο ανάπτυξης, η οποία διαδέχεται την αισθησιοκινητική περίοδο και

χωρίζεται α) στην προεγνωσιολογική περίοδο (3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup> έτος) και β) στη διαισθητική περίοδο (5<sup>ο</sup> και 6<sup>ο</sup> έτος). Η διαισθητική περίοδος θεωρείται ως μεταβατική από την προεγνωσιολογική περίοδο, στην περίοδο των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών. Κατά την προεγνωσιολογική περίοδο το νήπιο χρησιμοποιεί προένοιες, που μπορούν να ορισθούν ως έλλειψη σχέσης εγκλεισμού των στοιχείων ενός συνόλου και άμεση ταύτιση των επί μέρους στοιχείων μεταξύ τους, χωρίς τη μεσολάβηση του συνόλου. Η προένοια είναι το ενδιάμεσο ανάμεσα στο εικονοποιημένο σύμβολο και την έννοια αυτή καθ' αυτή (Ρίτςμοντ, 1970). Η σημαντική κατάκτηση της διαισθητικής περιόδου είναι ότι παράλληλα με την έντονη παρουσία της συμβολικής λειτουργίας, το παιδί αρχίζει να σχηματίζει έννοιες. Εμφανίζονται τρεις βασικές λειτουργίες κατά τη διαισθητική περίοδο α) η ικανότητα του παιδιού να σχηματίζει λογικές κατηγορίες β) η ικανότητα να διακρίνει σχέσεις και γ) η ικανότητα να χειρίζεται αριθμητικές έννοιες.

Σύμφωνα με την αναπτυξιακή θεωρία του Vygotsky η εξελικτική πορεία των εννοιών περνά από τρεις βαθμίδες

Στην πρώτη βαθμίδα της συγκριτικής σκέψης, που εμφανίζεται στα παιδιά της προσχολικής ηλικίας, η σημασία των λέξεων είναι συγκεχυμένη, απροσδιόριστη και αδιαμόρφωτη, γιατί τα αντικείμενα στα οποία αντιστοιχούν οι έννοιες συνδέονται μεταξύ τους, στην αισθητήρια αντίληψή τους, κατά τρόπο συγκριτικό, χωρίς δηλαδή επαρκή εσωτερική συγγένεια και σχέση ανάμεσά τους.

Στη δεύτερη βαθμίδα της συμπλεκτικής σκέψης, το παιδί αρχίζει να συνενώνει ομοειδή αντικείμενα σε μια ομάδα, συγκροτώντας τα σε συμπλέγματα σύμφωνα με τους νόμους των αντικειμενικών σχέσεων, που έχει ήδη ανακαλύψει μέσα στα πράγματα.

Στην τρίτη βαθμίδα της εννοιολογικής σκέψης κάνει την εμφάνισή της η γνήσια έννοια, η οποία δεν προϋποθέτει μόνο τη συνένωση και γενίκευση των ξεχωριστών συγκεκριμένων εμπειρικών στοιχείων, αλλά και την απόσπαση, την αφαίρεση και την απομόνωση των επιμέρους στοιχείων, δηλαδή την ικανότητα της θεώρησης των στοιχείων έξω από τη συγκεκριμένη σύνδεση, με την οποία μας είναι δοσμένα στην εμπειρία. Βέβαια, παρά την ικανότητα του παιδιού στο στάδιο αυτό του σχηματισμού των γνήσιων εννοιών, υπάρχει ακόμη απόκλιση ανάμεσα στο σχηματισμό της έννοιας και στο λεκτικό ορισμό της, καθόσον ο δρόμος από το

αφηρημένο στο συγκεκριμένο αποδεικνύεται εξίσου δύσκολος με την άνοδο από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο.

### **Λογικομαθηματική γνώση**

Ο Piaget διακρίνει τρία είδη γνώσεων: Την κοινωνική, τη φυσική και τη λογικομαθηματική. Η κοινωνική γνώση μεταδίδεται από τον ενήλικα. Η φυσική γνώση προέρχεται από τις φυσικές ιδιότητες των αντικειμένων. Το παιδί για να ανακαλύψει τις φυσικές ιδιότητες των αντικειμένων πρέπει να ενεργήσει πάνω σ' αυτά και να ανακαλύψει τις αντιδράσεις τους στις ενέργειές του. Σημαντικό μέρος της διαδικασίας συγκράτησης της φυσικής γνώσης είναι η απλή αφαίρεση (η αφαίρεση των ιδιοτήτων, που παρατηρούνται μέσα στα πράγματα ή γενικά στην εξωτερική πραγματικότητα). Η φυσική γνώση συγκροτείται μέσα σε ένα λογικομαθηματικό πλαίσιο. Η λογικομαθηματική γνώση δημιουργείται με τη σκεπτόμενη αφαίρεση και έχει ως πηγή το ίδιο το υποκείμενο. Στη σκεπτόμενη αφαίρεση το παιδί δημιουργεί και εισάγει σχέσεις ανάμεσα στα πράγματα. Τα χαρακτηριστικά της λογικομαθηματικής γνώσης είναι τα ακόλουθα: (Kamii C.-Devries R., 1979).

- Δε διδάσκεται γιατί δομείται από τις σχέσεις που το παιδί βρίσκει ανάμεσα στα αντικείμενα. Κάθε μεταγενέστερη σχέση που δημιουργεί είναι μια σχέση ανάμεσα στις σχέσεις που είχε δημιουργήσει.
- Όταν την αφήσουν να αναπτυχθεί μόνη ή ενθαρρύνουν το παιδί να είναι περίεργο και άγρυπνο σε σχέση με το περιβάλλον του, θα αναπτυχθεί προς περισσότερο λογικομαθηματική σχέση.
- Όταν συγκροτηθεί μία φορά, ποτέ δε λησμονείται.

### **Χωροχρονικές έννοιες**

Οι δεξιότητες στο χώρο στρέφονται προς δύο κυρίως κατευθύνσεις. Η πρώτη ασχολείται με το χώρο και συνδέεται με την εξελικτική Ψυχολογία, σύμφωνα με την οποία οι πρώτοι μετασχηματισμοί του παιδιού είναι αυτοί που διατηρούν τις τοπολογικές ιδιότητες των αντικειμένων και μόνο αργότερα το παιδί είναι ικανό να μεταφέρει στο δικό του αναπαραστασιακό χώρο τις ευκλείδειες ιδιότητες των αντικειμένων. Η δεύτερη ασχολείται με τη Γεωμετρία και έχει ως αντικείμενο δεξιότητες και διαδικασίες, όπως αυτές του προσανατολισμού.

Προσανατολισμός για το παιδί στο χώρο σημαίνει ότι κατευθύνεται αρχικά με ένα σύστημα αναφοράς επικεντρωμένο στο σώμα του και αργότερα μεταφέρει το σύστημα αναφοράς έξω από το σώμα του.

Το παιδί βλέπει τον εαυτό του (το Εγώ του) και τα πράγματα του εξωτερικού κόσμου σε αλληλεξάρτηση μέσα στο χώρο και αυτοδιευθύνεται-αυτοκατευθύνεται μέσα στο χώρο.

- αξιολογεί τις κινήσεις του από χωροχρονική άποψη
- τοποθετείται μέσα στο χώρο
- ενεργεί και περνάει σε δραστηριότητες (Κοντοδήμας,1986).

Σύμφωνα με το Metleau-Ponty με το σώμα μου συνειδητοποιώ τα εξωτερικά αντικείμενα, τα χειρίζομαι, τα εποπτεύω και τα περιβάλλω. Το παιδί ανακαλύπτοντας το χώρο (ετερογνωσία), αυτοανακαλύπτεται (αυτογνωσία).

Οι πρώτες χωρικές σχέσεις που παρατηρεί το παιδί και διατηρεί και στο σχέδιό του είναι οι τοπολογικές ιδιότητες για την παιδική αναπαράσταση του χώρου και οι σχέσεις όπως εσωτερικό, εξωτερικό, σύνορο κ.α (Πατρώνης, 2001). Οι τοπολογικές σχέσεις αφορούν αμοιβαίες σχέσεις αντικειμένων, χωρίς κάποιο να παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο ένα από τα δύο αντικείμενα. Στις τοπολογικές σχέσεις αντιστοιχούν καταστάσεις στις οποίες δεν παρεμβαίνει η γενική μορφή των αντικειμένων ή τα μεγέθη αλλά ο εγκλεισμός, ο διαχωρισμός, η γειτνίαση, η συνέχεια, η διαδοχή ή η επαφή περιγραμμάτων και σημείων.

### **Προσέγγιση των ποιοτικών σχέσεων**

Το παιδί οδηγείται από την αντίληψη του χώρου και του χρόνου προς τις συγκρίσεις και τις ομαδοποιήσεις των στοιχείων με στόχο την επεξεργασία αρχικά ποιοτικών και αργότερα ποσοτικών συγκρίσεων και σχέσεων

Η προσέγγιση των ποιοτικών σχέσεων έχει ως στόχο να βοηθήσει τα παιδιά να γίνουν ικανά να επεξεργάζονται και να νοηματοδοτούν τις πληροφορίες που προσλαμβάνουν μέσω των αισθήσεων. Ο σχηματισμός της ενορατικής αναπαράστασης των αντικειμένων και των καταστάσεων στις οποίες βρίσκονται τα παιδιά και η λεκτική διατύπωσή τους, απαιτούν διαδικασίες ομαδοποίησης, ταξινόμησης, αφαίρεσης χαρακτηριστικών, γενίκευσης και συμβολισμού.

## **Η έννοια της ταξινόμησης**

Η ταξινόμηση είναι μια βασική λογικομαθηματική έννοια. Στο προεννοιολογικό στάδιο όταν μιλάμε για ταξινόμηση αναφερόμαστε στο μηχανισμό με τον οποίο το παιδί σημειώνει ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στα πράγματα και ξεχωρίζει τα όμοια.

Είναι η διαδικασία μέσα από την οποία η σκέψη των παιδιών απομονώνει ορισμένα γνωρίσματα που είναι κοινά σε κάποια αντικείμενα και συνθέτει ένα σχέδιο δράσης. Το παιδί στις επιλογές ταξινόμησης αντικειμένων παρουσιάζει ελλείψεις. Ο σχηματισμός εννοιών δομεί την ικανότητα του παιδιού να ομαδοποιεί και να ταξινομεί τα διάφορα αντικείμενα, γεγονότα ή καταστάσεις σε ομάδες με βάση κάποιο κοινό τους γνώρισμα.

Ο Piaget πιστεύει ότι τα παιδιά μπορούν να παρατηρούν διαφορές και ομοιότητες και να ομαδοποιούν αντικείμενα καθώς και να μπορούν να τα ταξινομούν, δεν μπορούν όμως να μάθουν να ταξινομούν, να βάζουν κατά σειρά ή να χρησιμοποιούν έννοιες σχετικά με τους αριθμούς.

Οποιοδήποτε κριτήριο «εφευρίσκει» το παιδί για το σχηματισμό ομάδας θεωρείται σωστό, εφόσον το χρησιμοποιεί με συνέπεια. Ο στόχος στην ταξινόμηση δεν είναι να καταλάβει το παιδί τον τρόπο με τον οποίο επιθυμεί ο παιδαγωγός να ταξινομούνται τα πράγματα. Το παιδί πρέπει να συναισθάνεται το σκοπό για τον οποίο σχηματίζει και ανασχηματίζει διάφορες ομάδες. Να κάνει επεξεργασία ιεραρχήσεων και υποκατηγοριών. Αυτό που προέχει είναι να μάθουν τα παιδιά τη διαδικασία της δημιουργίας και της υποβολής μιας λογικής δομής στην ασάφεια που χαρακτηρίζει τον πραγματικό κόσμο. Η ταξινόμηση γίνεται συνήθως με βάση μια σκοπιμότητα χρήσης ή οργάνωσης των αντικειμένων που μας περιβάλλουν. Ενοποιεί τα αντικείμενα αυτά με βάση τα κοινά τους γνωρίσματα, τα εγκλείει, τα συνθέτει, τα ταξινομεί και τα ονοματίζει. Οι γνωστικές διεργασίες που απαιτούνται για την εκτέλεση πράξεων ταξινόμησης, βασίζονται γενικά στην ικανότητα διαφοροποίησης (δηλαδή αναγνώρισης διαφορών μεταξύ στοιχείων), καθώς και ένταξης (δηλαδή σύνθεσης διαφορετικών στοιχείων σε ένα ενιαίο σύνολο).

### **Έννοια του αριθμού**

Δύο από τα έργα που χρησιμοποίησε ο Piaget, για να μελετήσει τη μετάβαση από την προεννοιολογική στη συγκεκριμένη σκέψη έχει σαφώς σχέση με την έννοια του αριθμού. Αυτά τα δύο προβλήματα της «συμπερίληψης σε ομάδα» και της «διατήρησης» είναι κεντρικής σημασίας για τις απόψεις του Piaget, πάνω στην πρώτη μαθηματική εκπαίδευση. Το

πρόβλημα της «συμπερίληψης σε ομάδα» σχεδιάστηκε για να είναι δοκιμασία για την ικανότητα των παιδιών να συγκρίνουν ένα σύνολο με ένα υποσύνολό του ή ένα όλο με ένα μέρος του όλου. Το παιδί μπορεί να εστιάσει την προσοχή του είτε στο σύνολο είτε στο υποσύνολο, αλλά δεν μπορεί ποτέ να λάβει υπόψη του και τα δύο συγχρόνως.

Το δεύτερο έργο που είναι κρίσιμο στη θεώρηση του Piaget, για την πρώιμη μαθηματική σκέψη αφορά τη «διατήρηση των αριθμών».

Ο Piaget, ισχυρίζεται ότι τα παιδιά κάτω των επτά χρόνων δε διατηρούν συνήθως τον αριθμό. Απαντούν, πιστεύοντας ότι η αλλαγή του μήκους της σειράς αλλάζει τον πληθικό αριθμό. Σύμφωνα με τον Piaget η διατήρηση και η συμπερίληψη σε ομάδα δεν είναι πρωταρχικά μαθηματικές αλλά λογικές ιδέες. Οι μαθηματικές έννοιες αναπτύσσονται μέσα από την επίλυση προβλημάτων.

Η Donaldson επικρίνει τις έννοιες «συμπερίληψη» και «διατήρηση».

Στη συμπερίληψη το παιδί εστιάζει την προσοχή του στις διαφορές ανάμεσα στις υποομάδες, ενώ του ζητείται η διάκριση ανάμεσα στην υποομάδα και τη συνολική ομάδα. Στη δε διατήρηση, οι ενέργειες του ενηλίκου υπονοούν μια συγκεκριμένη ερμηνεία, ενώ η ερώτηση προς τα παιδιά απαιτεί διαφορετική ερμηνεία. Η Donaldson ισχυρίζεται ότι τα παιδιά θα συναντήσουν μεγάλη δυσκολία στη μάθηση των μαθηματικών, αν η γλώσσα των ενηλίκων δεν τους είναι αντιληπτή (μη ενσωματωμένη σκέψη).

Στην ικανότητα του παιδιού για αρίθμηση στηρίζεται η ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών υποστηρίζουν σύγχρονοι ερευνητές (Bideaud, Meljack & Fisher, 1992, Steffe, von Glaserfeld, Richards & Cobb, 1983, Steffe & Cobb, 1988). Μέσα από τη δημιουργία ενός μοντέλου περιγράφεται εξελικτικά η κατασκευή του αριθμού από το παιδί (Καφούση, 2000). Η αρίθμηση ορίζεται ως η απαγγελία μιας σειράς αριθμολέξεων, έτσι ώστε κάθε αριθμολέξη να συνδέεται με μια αριθμήσιμη μονάδα. Σύμφωνα με τη διάκριση αυτή, αρχικά, τα παιδιά έχουν την ικανότητα να αριθμούν μόνο αντικείμενα που γίνονται ορατά από τις αισθήσεις τους. Αργότερα, τα παιδιά μπορούν να θεωρούν ως αριθμήσιμες μονάδες και αντικείμενα που δεν είναι διαθέσιμα στο αντιληπτικό τους πεδίο. Η ικανότητά τους αυτή τους επιτρέπει, να βρουν με τη βοήθεια της αρίθμησης πόσα είναι όλα τα αντικείμενα μιας συλλογής που ένα μέρος της δεν είναι ορατό. Συνήθως, στην περίπτωση αυτή τα παιδιά σχηματίζουν στο μυαλό τους εικόνες των συλλογών των αντικειμένων που αριθμούν. Οι φυσικές κινήσεις που χρησιμοποιούνται αυθόρμητα από τα παιδιά όταν αριθμούν (π.χ κινήσεις δακτύλων) αποτελούν ένα πιο εξελιγμένο είδος μονάδων αρίθμησης (Fuson, 1982, van den Brink, 1981).



### **Επίλυση προβλημάτων μέσα από τη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων**

Η άποψη του Piaget για την επίλυση προβλημάτων σχετίζεται με τις απόψεις του για το πώς και γιατί συμβαίνει η ανάπτυξη. Τα προβλήματα τα οποία από τη φύση τους αποτελούν προκλήσεις για την υπάρχουσα κατανόηση, έχουν το δυναμικό για να διεγείρουν τη γνωστική ανάπτυξη.

Όταν οι καθημερινές δραστηριότητες εκτελούνται μηχανικά, λίγα μόνο πράγματα αποκαλύπτονται για τη συλλογιστική των παιδιών. Αντίθετα, όταν τα παιδιά αντιμετωπίζουν ασυνήθιστα προβλήματα, οι στρατηγικές για τη λύση τους αποκαλύπτουν τη λογική τους.

Σύμφωνα με τον Vygotsky, η κατανόηση των τρόπων με τους οποίους ο κοινωνικός κόσμος συμβάλλει στη σκέψη των παιδιών και καθορίζει τη δυνατότητά τους να επιλύουν προβλήματα, είναι η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης (ΖΕΑ), το κοινωνικό πλαίσιο υποστήριξης και τα πολιτισμικά εργαλεία. Με την έννοια της Ζώνης Εγγύτερης Ανάπτυξης (ΖΕΑ) ορίζει την απόσταση ανάμεσα στο πραγματικό αναπτυξιακό επίπεδο (αυτό που έχει ολοκληρωθεί), όπως προσδιορίζεται από την ανεξάρτητη λύση προβλημάτων και το ανώτερο επίπεδο της εν δυνάμει ανάπτυξης, όπως προσδιορίζεται από τη λύση προβλημάτων υπό την καθοδήγηση των ενηλίκων (Vygotsky, 1997). Το κοινωνικό πλαίσιο στήριξης, περιλαμβάνει τη βοήθεια προς τα παιδιά για να σκεφτούν τον κατάλληλο τρόπο της μοντελοποίησης επίλυσης προβλημάτων. Ο κοινωνικός κόσμος επηρεάζει επίσης τη γνωστική ανάπτυξη παρέχοντας μια ποικιλία εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων. Ο πολιτισμός ως σύνολο μεταδίδει συμπεριφορές και αξίες που επηρεάζουν τη γνωστική ανάπτυξη (Fuson (1988)). Η μοντελοποίηση επίσης επιδιώκει τη συγκρότηση της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Ο εκπαιδευτικός επιλέγει κατάλληλα προβλήματα που θα συμβάλλουν στα γνωστικά αποτελέσματα που επιθυμεί. Ανάμεσα στη στιγμή που ο μαθητής δέχεται το πρόβλημα ως δικό του και στη στιγμή που επιλέγει την απάντησή του, ο εκπαιδευτικός δεν παρεμβαίνει στη λύση. Συμμετέχει σε ένα παιχνίδι με το σύστημα των αλληλεπιδράσεων του μαθητή με το πρόβλημα που του θέτει αυτός. Η μοντελοποίηση μας εισάγει σχέσεις ανάμεσα στα πράγματα. Η διδακτική σπουδαιότητα ενός μοντέλου συνίσταται στη δυνατότητά του «να γεννά, να παράγει και να αναπαριστάνει ένα απεριόριστο πλήθος ιδιοτήτων, ξεκινώντας από έναν περιορισμένο αριθμό στοιχείων και κανόνων που συνδυάζονται μεταξύ τους». Ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά δομούν την πραγματικότητα και

επεξεργάζονται τις απαντήσεις τους στα προβλήματα συνδέεται με τις παραστάσεις τους και τις ερμηνείες που δίνουν στην κατάσταση. Η μεταφορά ορισμένων γνωστικών στρατηγικών από τον ένα τομέα στον άλλο, η γενίκευση των σχημάτων επίλυσης δε γίνεται άμεσα και απευθείας, αλλά διαμέσου μιας αναλογίας που επιτρέπει στο άτομο να μοντελοποιήσει την καινούργια κατάσταση.

Μια σειρά επίσης ερευνητών συμφωνούν ότι τα παιδιά έρχονται στο σχολείο διαθέτοντας μία ποικιλία από αυτοσχέδιες στρατηγικές λύσεων μαθηματικών προβλημάτων (Carpenter & Moser, 1982, Steffe, Cobb & Glasersferd, 1988). Η μετάβαση από τις αυθόρμητες γνώσεις των παιδιών στις τυποποιημένες μαθηματικές γνώσεις αποτελεί το σημαντικότερο ίσως στάδιο της διαδικασίας μάθησης των μαθηματικών. Η διδασκαλία στο σχολείο πολλές φορές παραμελεί τις αυθόρμητες γνώσεις των παιδιών με αποτέλεσμα να επιβάλλει στους μικρούς μαθητές μαθηματικές γνώσεις που συχνά δεν έχουν κανένα νόημα για τους ίδιους.

Οι μαθητές επομένως δε θα πρέπει να αρχίσουν τη δραστηριότητα της μάθησης τυχαία αλλά σχεδιασμένα με τη χρήση μεθόδων που οδηγούν στην εξερεύνηση και στην έρευνα. Η υποθετική πορεία μάθησης συμβάλλει προς αυτή την κατεύθυνση θέτοντας τρεις άξονες:

- Τους στόχους της μάθησης που καθορίζουν την κατεύθυνση της διδασκαλίας
- Τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες
- Την υποθετική διαδικασία της μάθησης δηλαδή μια πρόβλεψη για το πως οι μαθητές σκέπτονται και μαθαίνουν κατά την είσοδό τους σε ένα πλαίσιο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων.

Οι κατάλληλα διαμορφωμένες για το παιδί αυτής της ηλικίας καταστάσεις, το προτρέπουν να δράσει, να εμπλακεί, να κινητοποιήσει τις γνώσεις και τις δεξιότητές του. Αν οι γνώσεις που διαθέτει το παιδί δεν είναι αρκετές για να αντιμετωπίσει το «πρόβλημα» (την κατάλληλα διαμορφωμένη κατάσταση), τότε θα τις μετασχηματίσει, θα τις επανοργανώσει και θα τις επαναπροσδιορίσει. Οι δραστηριότητες είναι απαραίτητο να πλαισιώνονται με το κατάλληλο υλικό. Αυτό μπορεί να είναι λειτουργικό (για τις ανάγκες ανάδειξης της μαθηματικής έννοιας) ή συνοδευτικό (για τη δημιουργία κινήτρων συμμετοχής). Σημαντικό ρόλο στη διδακτική κατάσταση, κατέχει η απεικόνιση της εμπειρίας που προτείνουμε στο παιδί, η δραματοποίηση της κατάστασης και η σαφής οριοθέτηση της δράσης με τη βοήθεια του υλικού (Τζεκάκη, 2002).

### **Επίλογος**

Η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να βοηθά και να διευκολύνει τα παιδιά να κατανοούν σε βάθος τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και τις δομές των μαθηματικών και όχι να καλλιεργεί τη στείρα απομνημόνευση και τη μηχανική μάθηση (Τουμάσης,1999).

Η διδασκαλία θεμάτων ή δεξιοτήτων χωρίς διασαφήνιση του ιδιαίτερου ρόλου τους στην ευρύτερη δομή του αντίστοιχου θεματικού γνωστικού πεδίου δεν είναι αποδεκτή διδακτικά (Κολέζα,2000). Μια τέτοια διδασκαλία καθιστά για το παιδί εξαιρετικά δύσκολη τη γενίκευση από αυτά που έχει μάθει στις γνώσεις που καλείται να διαχειριστεί αργότερα. Η μάθηση επίσης, που υστερεί ως προς τη σύλληψη των γενικών αρχών, προκαλεί ελάχιστο νοητικό ενδιαφέρον και διάθεση για αυτοανακάλυψη. Οι γνώσεις επιπλέον που αποκτήθηκαν χωρίς να είναι συνδεδεμένες στα πλαίσια μιας συνολικής δομής ξεχνιούνται πολύ γρήγορα από τα παιδιά.

Συνολικά, μια σύγχρονη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από δύο κύριες τάσεις:

- ◆ Το παιδί να μην αντιμετωπίζεται ως αποδέκτης μαθηματικών εννοιών, οι οποίες προσφέρονται από το διδάσκοντα με τη μορφή αφήγησης ή ερωταπόκρισης, αλλά να εμπλέκεται δυναμικά στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης.

- ◆ Η μαθηματική γνώση να αναδεικνύεται μέσα από κατάλληλες και ειδικά διαμορφωμένες διδακτικές δραστηριότητες, προβλήματα και διδακτικές καταστάσεις για το κάθε μαθηματικό αντικείμενο που θα διδαχτεί.

Μέσα από τέτοιες προσεγγίσεις, τα νήπια θα αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά, όπως πραγματικά είναι, ως μία δημιουργική ανθρώπινη δραστηριότητα.

### **Abstract**

Piaget's developmental theory, Vygotsky's socio-cultural approach and the contemporary learning theories offer guidance to the kind of mathematical concepts mostly suggested for pre-school children and to the process of their teaching approach.

The assignment in question deals with the teaching approach of mathematical concepts, the formation of concepts, the types of mathematical concepts, the approach of quality relations, the figuration of the concept of number and problem solving through the creation of teaching situations.



## Βιβλιογραφία

- Bideaud, J., Meljack, C. & Fisher, J.P. (Eds) (1992). *Pathways to number Children's developing numerical abilities*. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter,T.P & J. M Moser, (1982).The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T.P Carpenter, J. M Moser & T.A Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp.9-24) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Chevallard,Y.(1986).*Transposition didactique*. Grenoble:Pensee Sauvage.
- Cobb, P. (1994). Where In the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, 7(23),13-20.
- Cobb,P & Wheatley,G. (1988). Children's initial understanding of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*,10(3),1-28.
- Donald Children's son M., Grieve, R., Pratt, C., (επιμ.)(1984). *Early Children's Childhood Development and education*. N.Y: Basil Blackwell
- Fuson, K., C.(1982).An analysis of the counting on solution procedure in addition. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp 67-81). Hillsdale, NJ: Lawrence Errlbaum.
- Fuson, K.,C.,(1988). *Children's Counting and Concept of Number*. N.Y: Springer-Verlag.
- Hughes, M.(1999).*Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών. Δυσκολίες στην εκμάθηση των μαθηματικών*. Βοσνιάδου Σ., (επιμ).Αθήνα:Gutenberg. *Επιστημονική θεώρηση*
- Kamii C.& Devries R.,(1979).*Η θεωρία του Jean Piaget και η προσχολική αγωγή*. Αθήνα: Δίπτυχο.
- Metleau-Ponty (Φαινομενολογία) Εκδ.Gallimard, Paris  
(j de Ajuriaguerra "Psychiatrie de l' enfant)
- Piaget, J. (2000). *Περί Παιδαγωγικής*. Σαμαρτζή, Σ. (επιμ.). Αθήνα:Ελληνικά Γράμματα.
- Steffe, L.P, & Cobb, P. (1988). Construction of arithmetical meanings and strategies. Springer- Verlag.
- Steffe, L.P, von Glaserfeld, E., Richards J& Cobb,P.,(1983). *Children's counting types : philosophy, theory and application*. N.Y: Praeger Scientific.
- Van den Bring, J.(1981). Queries around the number concept. In *Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Conference of the International Group* (1),56-62. Grenoble: Laboratoire Institut Mathématiques Appliquées.
- Vygotsky,L.S.(1934). Σκέψη και Γλώσσα. Αθήνα :Γνώση,1988.
- Vygotsky, L.S. (1997). *Νους στην Κοινωνία*. Αθήνα : Gutenberg.
- Κασιμάτη, Κατερίνα (2001). *Θεωρία κατασκευής της γνώσης (constructivism): Μια σύγχρονη διδακτική προσέγγιση*. Πανελλήνιο Συνέδριο Κυθηραϊκών Μελετών. Κύθηρα.

- Καφούση, Σ.(2002).Τα Μαθηματικά των παιδιών του Νηπιαγωγείου. *Σύγχρονο Νηπιαγωγείο*,(13),20-22.
- Κολέζα,Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.
- Κολιάδης Ε.(1997). *Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη*. Αθήνα:Ελληνικά Γράμματα.
- Κοντοδήμας, Δ. (1986).Εισαγωγή του παιδιού κανονικού/ ειδικού στα Μαθηματικά. Αθήνα: Ρακούγγα.
- Πατρώνης, Τ.(2001).*Θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και παιδική σκέψη*. Αθήνα:Δίπτυχο.
- Ρίτςμοντ, Π.(1970).*Εισαγωγή στον Piaget*. Αθήνα: Υποδομή.
- Τζεκάκη,Μ.(2002).*Μαθηματικές δραστηριότητες για την Προσχολική Ηλικία*. Αθήνα :Gutenberg.
- Τουμάσης, Μ.,(1999).*Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα:Gutenberg.